스토리텔링 고교 교과서 : 미적분 (calculus in context)

연구팀 4	이상구(팀장), 신준국, 전철, 윤희동(조교)

SNS 의견 수렴 : 스토리텔링(calculus in context) 고교 교과서에서 (예를 들어) 미적분 부분을 만든다면, 학생들은 어떤 책을 보고 싶어 할지 궁금합니다. (예) 수학사+개념대화+본문+수리논술형문제+공학도구+토론+결론 이면 어떨까 생각하는데 고수들의 의견은... 그리고 추천하는 적당한 공학적 도구는 무었이 있을까요?

한** : 좀 더 색다른 포맷이 필요하지 않을까요.
방** : 소설로 스토리를 만들면 좋겠죠? 넘버스 처럼...
Kim : 스토리텔링하려면 각계각층인사가 함께 작업해야할거예요. 특히 동화작가요 ^^
Lee : 그런데 동화작가가 미적분의 내용을 말로 풀어쓰면 그것이 교과서가 되나요?
Kim : 그것은 교과서가 아닙니다. 수학교수. 수학교사의 표현만을 주장한다면 결국 기존 교과서의 틀에서 벗어날 수 없다는 뜻인데, 이를 극복하는 모델 교과서를 꼭 보고 싶습니다^^
방** : 발상의 전환이 필요합니다. 기존의 문제를 풀기위한 스토리텔링이라면 나와봤자 학습량 증가만 요구하게 할 겁니다. 개방형문제(open ended problem)나 구글이나 야후의 입사문제 등을 풀기 위한 스토리텔링이여야 합니다. 교재 calculus in context 는 모델 설정에 중심이 맞추어져 있어서 취지에 맞게 고치기가 힘듭니다.
한** : 동의합니다. 단지 동화작가의 스토리텔링 보다는 창의적 발상에 의한 재미있는 문제제기가 중요하다고 생각합니다.
이** : 문제는 스토릴텔링으로 미적분을 가르친다면, 그에 맞게 평가하여야 한다는 것입니다. 따라서 평가에 적정한 문제 모델 개발이 역시 중요한 부분입니다.

우리가 만들고 있는 스토리텔링 고교 샘플교과서(미적분) 모델 (calculus in context)의 전체적인 아이디어 :

"History- 삽화-Calculus in Context 와 같은 내용 - 수학적모델링 (strory, 서술형) 문제 - 공학적도구 활용 etc"
의 형식을 활용할 것입니다.
(우리 팀은 네이버 자료실에 직접 만든, 그리고 기존의 다양한 필요한 소재와 자료를 출처를 기록하며 올리면서, 그 내용을 필요에 따라 재구성하여 적극적으로 이용할 것입니다.)

1. 미분과 적분 부분의 모델은 대학 미적분교재 Calculus in context를 참고하여 한국 고교과정 미적분(입문)을 만들 것입니다.
2. 우선 교사용 자료책을 만든다는 생각으로 다양한 내용이 모두 들어가도록 만들 것입니다.
3. 그 중에 일부는 인터넷에 공개하고, 그 주소를 인용하고, 또 일부를 발췌하며, 완성된 학생용 샘플 교과서 모델을 만들 것입니다.

조안을 만들어 미비한 부분들에 대한 내용을 채우면서 마무리 하고, 다른 차시 들도 유사한 방식으로 진행합니다.

이상구 드림

I. (교사에게 도움을 준다) 수학사탐구형 또는 실생활 연계형 스토리텔링(역사와 주위에서 주어지는 수학적 상황을 찾아서 구체적인 문제 상황을 서술하고 합리적인 답안을 요구) + 수학적 내용 (학습의 맥락성) + 수학적모델링 + 공학적도구의 이용 + 얻어진 답의 검증과 의미 분석 + 원래 주어진 상황에 대한 합리적인 답을 제시하고 토론하는 과정을 거쳐 스스로 동의하는 결론에 도달함.

J. (학생에게 도움을 준다) Cloud 컴퓨팅 무료 공학도구를 제공하여 미적분이 왜 어떻게 탄생하였는지를 알게 하고, 배워야할 동기를 충분히 주며, 모델교과서를 통하여 (자신이 고른 교사의 동영상 강의를 듣고, 온라인과 오프라인으로) 미적분의 기본원리와 문제풀이를 위한 테크닉에 대하여 충분히 토론하면 자기주도적 완전 학습을 수행하고, (21세기 교육환경에 맞게) 복잡한 유사 또는 다양한 유형의 문제를 반복하여 푸는 시간과 노력 부분을 과감하게 줄여서 학생의 학습량을 절대로 늘리지 않는다. 그러나 실제 문제 해결력은 획기적으로 늘려 **'거의 모든 미적분의 문제를 그리고, 다루고, 실질적인 답을 구한 후, 그 답의 의미를 토론하는 능력'**을 보태준다. 그 도구로 언제+어디서나+누구라도+무료+우리말 + 배우기 쉬운+사용하기 쉬운 무료 공학적도구로 Graphing calculator를 포함하여 Sage, Geogebra, Wolfram alpha 를 중심으로 한국에서 개발된 모든 무료 스마트폰용 어플과 온라인 상의 클라우드컴퓨팅 도구를 활용한다.

주제 : 미분과 적분

주제별 스토리 전개 시놉시스 (줄거리 개요)

1-2 차시 (블럭 1time)

3-4차시 (블럭 2time)

조선 시대 수학 문제

**今有邑方不知大小, 各中開門, 出北門三十步有木,
出西門七百五十步見木. 問邑方幾何**

(지금 정사각형의 읍성이 있는데, 한 변의 길이를 모른다. 각 변의 한가운데마다 문이 열려 있으며, 북문을 나서서 30보 되는 곳에 나무 한 그루가 있는데, 서문을 나와 750보 되는 곳에서 처음으로 나무가 보였다. 읍성의 한 변은 얼마인가?)

– 九章算術(구장산술) –

**今有木長二丈, 圍之三尺. 葛生其下, 纏木七周. 上與木齊.
問葛長幾何.**

높이가 2장(=20자)이고 둘레가 3자인 나무가 있다. 칡이 그 아래에서 자라나 나무를 7바퀴나 감아 올라가 나무와 높이가 같아졌다. 칡의 길이는 얼마인가?

– 九章算術(구장산술), ‘句股(구고)’편 –

**今有 竿不知其高 從竿脚量距 二十五尺 立十尺之表 表後五尺
立四尺窺穴 望見表端與竿參齊 問竿高幾何竿**

지금 높이를 모르는 장대가 있다. 이 장대에서 25자를 띄우고 높이 10자인 막대기를 세웠다. 다시 이 막대기로부터 원래의 장대와 일직선 되게 5자를 띄우고 끝에 구멍이 있는 높이 4자인 막대기를 세웠다. 구멍을 통하여 장대 끝을 바라보았더니 먼저 세웠던 막대기 끝과 일치하였다. 원래의 장대의 높이를 계산하여라.

– 楊輝算法(양휘산법) –

8.1 선형변환의 행렬표현

<Youtube 동영상 주소: http://youtu.be/jfMcPoso6g4 >

벡터의 개념은 2차원 또는 3차원공간에서의 화살표에서 n 차원공간 R^n 안의 n -순서조(tuple)로 확장되어 왔다. 1장에서는 n 차원공간 R^n 을 정의하였다. R^n 에서 덧셈과 스칼라배라는 두 개의 연산을 정의하고, 그것이 갖는 여러 가지 성질을 확인하였다. 이 절에서는 n 차원 공간의 개념을 일반적인 벡터공간으로 확장한다.

...

행렬 $[T]_\alpha^\beta = A'$ 은 기저 α, β에 따라 모양이 변한다. 여기서 기저 α와 β는 순서기저이므로, 기저 α, β의 벡터들의 순서를 바꾸면 A' 의 열들도 바뀜을 의미한다.

$$\begin{tikzcd}
\text{표준기저 } \mathbf{x} \arrow[r, "T"] \arrow[d, dash] & \mathbf{y}=\boldsymbol{T}(\mathbf{x}) \arrow[d, dash] \\
\text{임의의 순서기저 } [\mathbf{x}]_\alpha \arrow[r, "A'"] & [\mathbf{y}]_\beta = \boldsymbol{A}'[\mathbf{x}]_\alpha
\end{tikzcd}$$

그림 8.1.4 $A = [T]$와 $A' = [T]_\alpha^\beta$

여기서 잠깐

1. 정리 8.1.1 의 유용성은 $T(\mathrm{x})$의 값을 행렬의 곱으로 계산할 수 있음을 뜻한다. 즉,

$$[\mathrm{y}]_\beta = [T(\mathrm{x})]_\beta = [T]_\alpha^\beta [\mathrm{x}]_\alpha = A' [\mathrm{x}]_\alpha$$

2. 행렬 $[T]_\alpha^\beta = A'$의 모양은 기저 α, β에 따라 변한다. 한 예로 순서 기저 α, β 안의 벡터들의 순서를 변경하면 A'의 열도 변함을 뜻한다.

예제 1

... Sage-math 실습 예제 2를 Sage-Math를 이용하여 실습해보자. 우선 선형변환 T에 해당하는 표준행렬인 $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -3 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$를 입력하자. http://math1.skku.ac.kr/home/pub/595

```
T = matrix(QQ, 3, 2, [1, 1, 1, -3, -2, 1])
print(T)
```

([1 1], [1 -3], [-2 1])

… 3. Area of triangle (삼각형의 넓이) http://math1.skku.ac.kr/home/pub/538
4. Projection (2차원상의 정사영) http://math1.skku.ac.kr/home/pub/539
5. 선형연립방정식 http://math1.skku.ac.kr/home/pub/540
6. 선형변환 (층밀림) http://math1.skku.ac.kr/home/pub/596
7. Curve Fitting http://math1.skku.ac.kr/home/pub/597
8. 선형변환 (정사영 변환과 대칭변환) http://math1.skku.ac.kr/home/pub/598
9. 선형변환 (회전-태극기)

http://math1.skku.ac.kr/home/pub/581

http://www.wolframalpha.com/

..

Sage **1.** 선형변환(선형연산자)가 $T\left(\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}\right)=\begin{bmatrix} x_1-x_2 \\ x_1+x_2 \end{bmatrix}$

이고, 기저가 $\alpha=\left\{\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix},\begin{bmatrix} -1 \\ 0 \end{bmatrix}\right\}$일 때, α에 관한 T의 행렬표현(변환행렬) $[T]_\alpha$를 구하여라.

Ans Sage를 이용하여 확인해보자. http://sage.skku.edu/

http://math3.skku.ac.kr/spla/CLA-8.1-Exercise-1

```
T=matrix(ZZ,[[1,-1],[1,1]]);T
a1=vector(ZZ,[1,1]);
a2=vector(ZZ,[-1,0]);
b1=a1
b2=a2
Ta1=T*a1;
Ta2=T*a2;
A=matrix(QQ,[b1,b2,Ta1,Ta2]).transpose();A
A.echelon_form()
```

[1 0 2 -1]

[0 1 2 0] $\therefore\ [T]_\alpha=\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$

- SKKU Single Cell Server http://sage.skku.edu/
- 2012-Visual LA & Calculus with Sage : http://matrix.skku.ac.kr/2012-LAwithSage/interact/
- 2012-CLA with Sage (all commands)
- 2012-Visual LA with Sage web book
- 2011-CLA with Mobile Sage
- 2011-Visualization of LA with Sage
- 2011-S-Matrix Theory - Appl (Web version)
- (New) 2011-Mobile Math with Sage

- 2010-10-MCwithSage-Apk
- 2010-10-SagsMatrixCalculator-Apk
- 2010-10-Matrix-Apk

Made by Prof. SGLee
http://matrix.skku.ac.kr/sglee/vita/LeeSG.htm
at Sungkyunkwan University in Republic of KOREA

주제 : 미분과 적분

(일단 교사용 자료를 만들고, 이로 부터 샘플교과서를 만들 예정입니다.)

기본구조
1. 수학사 2. 왜 배울까? Motivation 제공 3. 이야기로 배우는 미분법 4. 내용정리 5. 수리논술 6. 수학적모델링(실생활 연계) & 공학적도구 7. BBS 8. 결론 9. 평가 10. 기타

1. 수학 역사

미분적분학의 체계에는 영국의 수학자 뉴튼(Newton, I.; 1642～1727)과 독일의 수학자 라이프니츠(Leibniz, G. W.; 1646～1716)가 그 중심에 있다.

뉴튼은 유율이라는 개념을 도입하여 미분을 설명하였는데 이는 라이프니츠의 방법(즉, 함수 f(x)에서 x가 무한히 작은 증분인 미분(differential)의 변화량을 가질 때 f(x)의 변화량을 구하는 방법)에 비해 10년 정도 앞선 것이었다. 그러나, 미분법과 관련된 뉴튼의 논문은 1704년(『De Quadratura』)에 출판되고 라이프니츠는 1684년(『분수량, 무리량에도 적용할 수 있는 극대, 극소와 접선에 대한 새로운 방법 그리고 그것을 위한 특이한 계산법』)에 출판되어 논문의 발표는 라이프니츠가 앞섰다. 때문에 뉴튼과 라이프니츠는 서로 상대방이 자신의 아이디어를 훔쳤다고 비난하며 미분적분학의 발견의 명예가 과연 누구의 것인지에 대한 격렬한 논쟁이 수년간 계속되었고 이로 인해 유럽의 수학계는 둘 중 누구를 지지하는가를 놓고 심한 대립을 보이기도 하였다. 이러한 대립은 라이프니츠가 사망한 이후에도 계속되었으나, 오늘날에는 뉴튼과 라이프니츠가 각각 독자적인 방법으로 미분적분학을 수립하였다고 인정되고 있다.

라이프니츠의 큰 공헌 중의 하나는 미분법과 적분법의 기호를 고안한 것이다. 뉴튼은 일반화 될 수 있는 구체적인 결과를 중시하여 표기법에 큰 고민을 하지는 않았으나 반면 라이프니츠는 함축적이고 적합한 표기법을 찾기 위해 많은 노력을 기울였고 오늘날에는 dx와 $dF(x) = f(x)\,dx$에서 $F(x) = \int f(x)\,dx$ 가 된다는 적분 기호 $\int$ 등 라이프니츠의 기호가 주로 쓰인다.

한편, $\dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \dfrac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$ 에서 $\dfrac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x \to 0} \dfrac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$ 를 구하는 정식화된 기호는 코시에 의하여 만들어졌다.

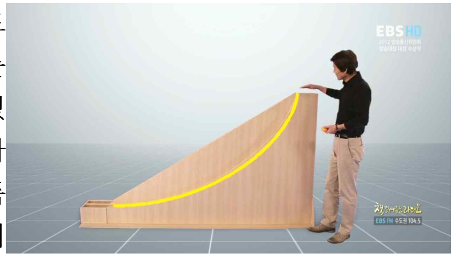
링크 : (matrix에 동영상 링크)

1-1 베르누이의 질문

부유한 가문의 한 귀족이 편지를 쓰고 있다. 당대의 유명한 수학자들에게 내는 수학문제 였다. 이 문제는 “높이가 다른 두 점 A와 B가 있다. A와 B를 잇는 최단 강하선, 즉 물체를 가장 빨리 내려오게 하는 선은 무엇인가?” 하는 문제이다.

이 답은 사이클로이드이다.

(http://navercast.naver.com/contents.nhn?contents_id=807) 이 문제를 낸 이유는 도전자들이 사이클로이드를 알고 있는가 하는 문제였다. 사이클로이드를 알고 있다면 이 문제를 풀 수 있었다. 사이클로이드는 높이가 다른 두 점을 잇는 최단 강하선이다. (내용추가) 즉 제일 빠른 곡선을 안다는 것은 최솟값을 안다는 것이고 이는 미적분학을 안다는 것이다.



이 문제는 뉴턴과 라이프리츠의 미분학의 저작권에 대한 논쟁과 많은 관련있다.

1-2 라이프니츠

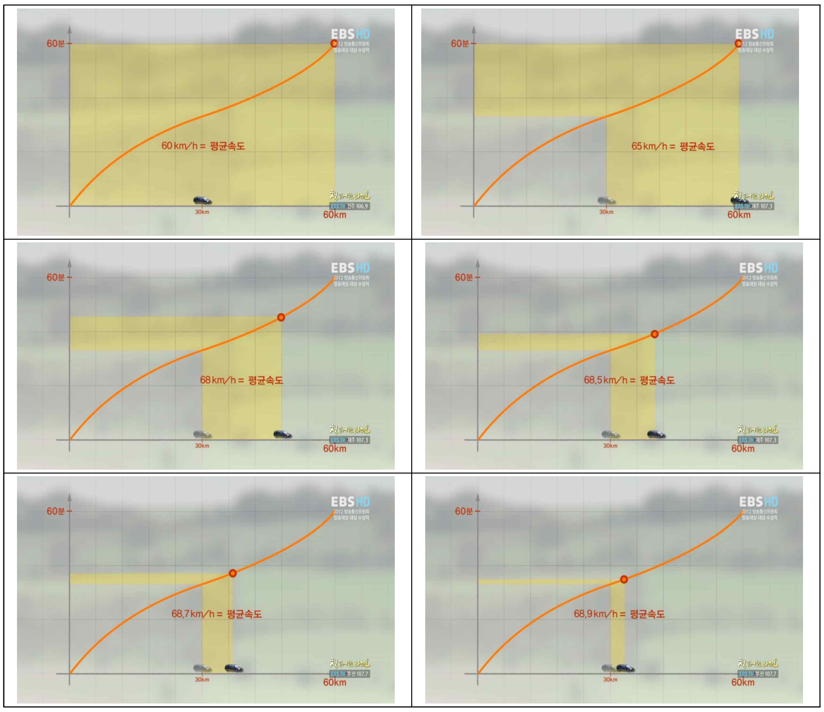
http://terms.naver.com/entry.nhn?docId=389107

라이프니츠는 (간단한 인물 소개)

-라이프니츠가 생각한 미적-

데카르트의 좌표를 이용해 가로를 거리라 하고, 세로를 시간이라 하자.

아래 그림에서 보면 1시간 동안 60km를 이동하였기 때문에 평균속도를 km/h라 할 수 있다. 하지만 속도는 계속 변화 하였다. 그렇다면 정확한 속도를 찾는 방법은 무엇일까?



정확한 속도를 구하기 위해 간격을 줄이면 된다.

간격을 좁일수록 정확한 값을 알 수 있게 된다. 순간 속도란 평균속도가 한 없이 가까워지는 어떤 지점을 의미한다.

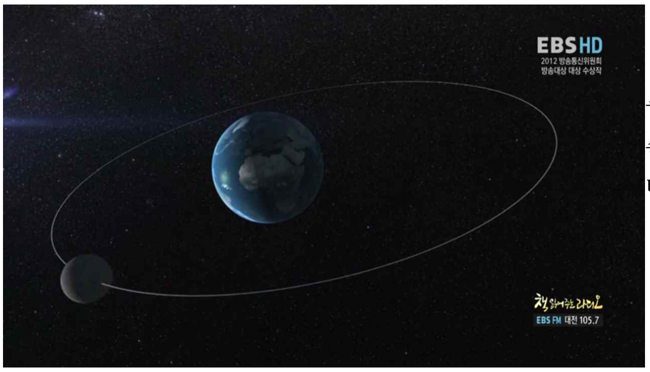
이것이 라이프니츠가 생각한 미분의 개념이 었다.

라이프니츠는 미분법이 새로운 시대를 열어 줄 것이라 직감했다. 또 자신의 연구가 인류의 방향을 바꾸어 줄 것이라 생각하였다.

1-3 뉴턴

링크 : http://terms.naver.com/entry.nhn?docId=879037
뉴턴은 (간단한 인물 소개)

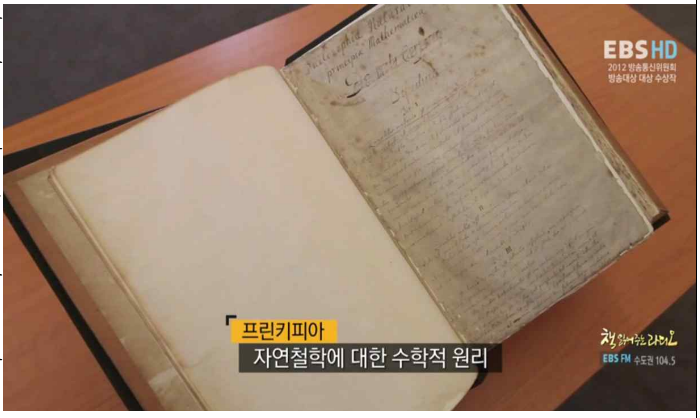
- 뉴턴의 생각한 미분-



뉴턴은 빛에 대한 호기심이 많았다. 행성은 타원으로 움직인다. 행성의 속도는 일정하지 않다. 타원이 돌 때 순간의 속도 이를 알아내기 위해 뉴턴은 미분을 사용하였다.

-프린키피아-

자연 철학에 대한 수학적 원리를 기록한 뉴턴의 저서이다. 이책은 뉴턴의 자필 원고로 뉴턴은 이 책에서 수학적 표현들을 이용해 우주의 원리를 표현하고자 하였다. 만유인력과 행성의 타원등도 이 책을 통해 전달 되었다. 이 책은 미적분학은 거의 사용되지 않았지만 미적분을 모르면 알 수 없는 책이었다.



1-4 논쟁

뉴턴과 라이프니츠의 논쟁은 대륙간의 싸움으로 퍼져 나갈 만큼 치열 하였다. 하지만 베르누이는 라이프니츠의 편이었다. 베르누이의 사이클로이드문제는 뉴턴이 미적분학을 알고 있는가를 물어 보는 문제이기도 하였다. 그렇지만 미적분의 저작권은 뉴턴의 승리였다. 라이프니츠는 왕립학회가 이 문제를 공정하게 해결해 주길 원하였지만, 당시 왕립학회의 회장은 뉴턴이었고, 라이프니츠는 일반 회원에 지나지 않았다. 왕립학회의 판정으로 라이프니츠의 명성은 회복되지 못했고, 자신의 비서만이 장례식에 참석하는 쓸쓸한 말년을 보냈다.

1-5 의미

지금 두사람의 미적분 중 끝까지 살아 남아 학교에서 가르치는 것은 라이프니츠의 미적분이라 할 수 있다. $\frac{dx}{dy}, \int$의 기호는 라이프니츠의 기호이다. 두 사람의 싸움은 소모적으로 보이지만 학자로써 당연한 싸움이었다. 두사람의 미적분은 우리를 정적인 세계에서 움직이는 세계로 수학을 확장 할 수 있게 하였다. (미적분의 의미 추가)

2. 왜 배울까? Motivation 제공

미분은 왜 배울까?
뉴튼이 물체가 어떻게 운동하는가를 수학적으로 나타내려는 노력 가운데 미분을 구상하였던 것처럼 미분은 운동하는 물체의 변화율을 나타낼 수 있는 좋은 도구이다. 단순히 생각하면 '곡선에 대한 접선의 기울기' 정도로 이해할 수 있지만 조금 더 깊이 생각해 보면 미분은 '모든 변화하는 대상을 수학적으로 분석하게 해 주는 강력한 도구'다. 미분은 만유인력의 법칙을 포함한 자연법칙을 기술하는데도 유용할 뿐 아니라 오늘날 학문의 전 영역에 걸쳐 그 유용성을 입증한다. 우리는 미분을 이용하여 속도, 열전도율, 온도의 변화율, 일의 변화율과 핵물리학에서의 방사성 물질의 붕괴율, 화학에서의 반응율과 압축률, 생물학에서의 혈액의 속도 및 군락의 성장률 등을 분석할 수 있다. 그 밖에도 지질학에서는 용해된 상태로 시작한 바위가 열전도에 의하여 냉각하는 비율을 알고자 할 때 미분을 사용하며 댐 안팎으로 흐르는 물의 비율을 알고자 할 때와 도시 내외의 인구밀도에 대한 변화율 및 기상학에서의 높이에 따른 대기압의 변화율을 알고자 할 때도 미분이 사용된다. 또, 미분은 사회적 현상의 확산을 분석하거나 수요함수, 소득함수, 이익함수의 도함수로 나타나는 한계수요, 한계소득, 한계이익 등의 경제학에서의 연구와 심리학에서의 학습곡선 및 성취도 함수에서의 증진율 등을 연구할 때도 유용하며 심지어 부동산 정보를 분석하거나 GSP의 위치를 보정하여 네비게이션이 정확한 안내를 돕는 것과 같은 일상생활에서 우리에게 편리함을 제공한다. 이처럼 자연현상이나 사회현상을 포함한 모든 학문의 영역 뿐 아니라 생활 전반에 걸쳐 미분은 그 유용성을 입증하고 있는 것이다.

3. 이야기로 배우는 미분법

학생: 선생님! 기울기는 직선에서만 쓰는 말이에요? 아니면, 곡선에도 있는 거에요?
선생님: 그야 직선에만 있지!
학생: 그럼 '곡선의 기울기'라는 말은 무슨 뜻이에요?
선생님: 사실 기울기란 말을 그렇게 사용하는 것은 적절치 않은 표현이지만, '곡선의 기울기'라는 말에서 이야기하고 싶어 하는 의도는 알 것 같구나. 학생아! 다음 이야기를 한 번 들어보렴.

어느 이상한 나라에서는 마법의 힘이 기차를 움직이는데 지금 아주 곤란한 상황에 봉착했어. 마법의 힘은 기차를 일정한 힘으로 밀어서 기차의 속도가 점점 빨라지고 이윽고 기차가 일정 속도 이상이 되면 철로가 끊어져 기차는 탈선하게 되는 큰 사고가 나기 때문에 그 전에 멈춰야 되는 거야. 그런데 문제는 이 나라에는 속도계가 없어서 어느 누구도 기차의 특정한 순간의 속도를 알 수가 없다는 거야. 세 친구가 모여서 해결책을 논의하고 있는데 한 번 들어볼까?

헤르미온느: 그래도 우리는 중요한 사실을 알고 있어! 우리 기차는 속도가 점점 빨라지고 있어서 시간에 따라 기차의 위치를 알려주는 함수가 이차함수 곡선의 형태라는 거야! 이를테면 $y = ax^2(a > 0)$와 같은 꼴이지.

포터: 그래, 또 있어. 일정시간 동안의 평균 속력도 계산할 수 있잖아! 예를들어, 기차의

위치를 가장 간단한 함수 형태인 $y=x^2$이라고 하면 기차의 시간이 x=1인 경우의 위치는 $1^2=1$이고 x=4인 경우의 위치는 $4^2=16$이니까 평균속도는 $\frac{4^2-1^2}{4-1}=\frac{15}{3}=5$가 되는 거지.

론: 그렇지만 평균속도를 가지고는 특정한 한 순간의 속도를 구할 수는 없잖아? 우리는 물체의 속도가 변하고 있을 때 어느 한순간의 이동속도가 필요하다구.

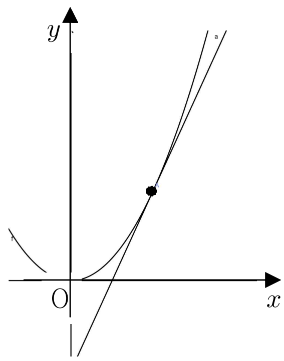
헤르미온느: 속력이 계속 변하는 물체의 어느 순간의 순간속도을 알려면 시간별 위치함수 곡선의 그 점에서의 기울기를 알면 될텐데… 곡선의 기울기를 어떻게 구하는지 모르겠단 말이야. 심지어 곡선에 기울기가 있는 건지도 모르겠고…

포터 : 이러면 어떨까? 곡선의 기울기를 구할 수 없다면 그 점에서 곡선의 기울기와 동일한 직선의 기울기를 구해 보는 거야. 이를테면 그 점에서 곡선의 기울기와 동일한 기울기를 가지면서 그 점에서만 곡선과 만나는 그런 직선

헤르미온느 : 어? 그런 직선을 곡선의 접선이라고 하잖아?

론 : 어, 그래? 그럼 이제 곡선 위의 한 점에서의 접선의 기울기만 구하면 순간속도를 구할 수 있는 거네? 결국, 곡선 위의 한 점에서의 곡선의 기울기는 그 점에서의 접선의 기울기와 같다고 정의할 수 있는 거구.

헤르미온느 : 맞아, 그런데 접선의 기울기만 구하면 된다고 했지만 사실 접선의 방정식을 알아낼 수 있는 방법이 더 어려울 수도 있어. 왜냐하면, 직선의 기울기란 서로 다른 두 점 (a,b), (c,d)가 있을 때 $\frac{b-d}{a-c}$로 정의하는 건데 접선은 이 곡선 위에서는 점이 접점 한 개 뿐이어서 기울기의 정의를 사용할 수가 없거든!



포터 : 론! 생각나? 우리 지난 번에 극한을 연구할 때, x가 어느 상수 a에 무한히 가까이는 가는데 절대 a가 되지는 않도록 하는 것을 lim 라는 기호를 써서 표현했잖아?

$$\lim_{x\to a} f(x)=\alpha$$

그걸 이용하면 뭔가 해결책이 있을 거 같은데?

론: 그랬지! 그렇지만 그게 접선의 기울기 구하는 거랑 무슨 관련이 있다는 거야?

헤르미온느 : 음. 그러니까 곡선 위에서 접점 이외의 다른 한 점을 선택해서 접점에 무한히 가까이 보내면서 접점이 되지 않도록 하자는 말이지?

포터: 그렇지! 그러면 그 두 점은 결코 같지는 않으니까 기울기를 구할 수 있고 무한히 가까이 가면서 접선의 기울기를 나타내게 된다고 할 수 있지 않을까? 이렇게 말이야.

1) 먼저 접점 (a,a^2)에서의 접선의 기울기를 구한다면, 그리이스 글자 Δ(델타)를 이용해서a보다 조금 더 큰 곡선 위의 점$(a+\Delta a, (a+\Delta a)^2)$을 잡아.
2) 점$(a+\Delta a, (a+\Delta a)^2)$을 접점$(a,a^2)$에 무한히 가까이 보낼 때 두 점을 지나는 직선의 기울기가 어떻게 되는지 보는거야

$$\lim_{a+\Delta a \to a} \frac{(a+\Delta a)^2 - a^2}{(a+\Delta a) - a}$$

헤르미온느: 그거 기발한 생각인데! 그런데 $\lim_{a+\Delta a \to a}$ 대신 $\lim_{\Delta a \to 0}$ 이라고 해도 될 것 같은데?

그러니까 식이 $\lim_{\Delta a \to 0} \frac{(a+\Delta a)^2 - a^2}{\Delta a}$ 가 되는거지!

론 : 어? 이 식은 계산할 수 있겠는데… 분자를 전개하면 $a^2 + 2a\Delta a + (\Delta a)^2 - a^2$ 이니까 정리하면

$$\lim_{\Delta a \to 0} \frac{2a\Delta a + (\Delta a)^2}{\Delta a}$$

$$= \lim_{\Delta a \to 0} (2a + \Delta a)$$

$$= 2a$$

이군! Δa가 0이 아니라서 나눌 수가 있었어.

헤르미온느 : 그럼, $y = x^2$의 접점 (a, a^2)에서의 접선의 기울기는 $2a$라는 거네?
예를 들어 $(0, 0)$에서는 $2 \times 0 = 0$이니까 기울기가 0이라는 뜻이고, 이건 x축을 말하는 거니까 맞아 떨어지네!

론: 와우! 찾은 건가? 찾았어! 와하하!

헤르미온느 : 신기하네!

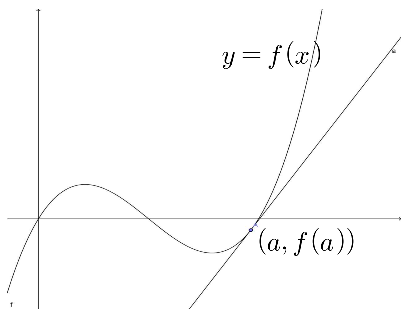
포터 : 아직 좋아하긴 일러. 함수가 $y = x^2$와 다른 기차들에도 적용이 되는지 봐야지!

헤르미온느 : 그건 내가 해볼게. 일반적인 함수를 $y = f(x)$라고 하고 함수의 그래프 위의 한 점 $(a, f(a))$에서 접하는 직선의 기울기를 구하려면 다른 한 점 $(a+\Delta a, f(a+\Delta a))$ 사이의 기울기 $\frac{f(a+\Delta a) - f(a)}{(a+\Delta a) - a}$ 에서 Δa를 0으로 무한히 보내면 되는거지? 즉, $(a, f(a))$에서 의 접선의 기울기는

$$\lim_{\Delta a \to 0} \frac{f(a+\Delta a) - f(a)}{\Delta a}$$

이군!

포터 : 이것에 이름을 붙이자. '함수 $y = f(x)$의 $x = a$에서의 미분계수' 어때?
론 : 좋아
헤르미온느 : 나도 좋아!



4. 내용정리

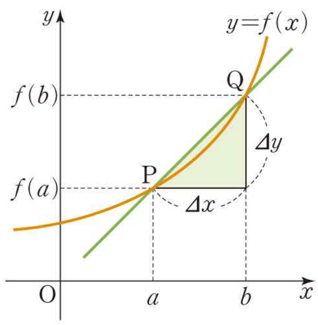
1.다항함수의 미분법

학습 목표
- 미분계수의 뜻을 알고, 그 값을 구할 수 있다.
- 미분계수의 기하학적 의미를 안다.
- 함수 $y=x^n$ (n은 양의 정수)의 도함수를 구할 수 있다.

I.미분계수

평균변화율

함수 $y=f(x)$에서 x의 값이 a에서 b까지 변할 때, y의 값은 $f(a)$에서 $f(b)$까지 변한다. 이때 x의 값의 변화량 $b-a$를 x의 **증분**이라 하고, Δx로 나타낸다.



또, 이에 대한 y의 값의 변화량 $f(b)-f(a)$를 y의 **증분**이라 하고, Δy로 나타낸다. 곧

$$\Delta x=b-a,\ \Delta y=f(b)-f(a)$$

이고 x의 증분에 대한 y의 증분의 비율

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=\frac{f(a+\Delta x)-f(a)}{\Delta x}$$

를 x의 값이 a에서 b까지 변할 때, 함수 $y=f(x)$의 **평균변화율**이라고 한다.

평균변화율

함수 $y=f(x)$에서 x의 값이 a에서 b까지 변할 때의 평균변화율은

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$
$$=\frac{f(a+\Delta x)-f(a)}{\Delta x}\quad (\text{단, } \Delta x=b-a)$$

예 제 1

함수 $f(x)=x^2$에서 x의 값이 다음과 같이 변할 때의 평균변화율을 구하여라.

(1) x의 값이 1에서 3까지 변할 때

(2) x의 값이 a에서 $a+\Delta x$까지 변할 때

풀이

(1) $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}=\dfrac{f(3)-f(1)}{3-1}=\dfrac{9-1}{2}=4$

(2) $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}=\dfrac{f(a+\Delta x)-f(a)}{\Delta x}=\dfrac{(a+\Delta x)^2-a^2}{\Delta x}$

$$=\frac{2a\cdot\Delta x+(\Delta x)^2}{\Delta x}=2a+\Delta x$$

답 | (1) 4 (2) $2a+\Delta x$

01 x의 값이 0에서 2까지 변할 때, 다음 함수의 평균변화율을 구하여라.

(1) $f(x)=x^3$ (2) $f(x)=-x^2+2x$

02 x의 값이 a에서 $a+\Delta x$까지 변할 때, 다음 함수의 평균변화율을 구하여라.

(1) $f(x)=5x+3$ (2) $f(x)=x^2-2x+3$

미분계수

함수 $y=f(x)$에서 x의 값이 a에서 $a+\Delta x$까지 변할 때, 이 함수의 평균변화율은

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{f(a+\Delta x)-f(a)}{\Delta x}$$

이다.

여기서 $\Delta x \to 0$일 때, 평균변화율의 극한값

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(a+\Delta x)-f(a)}{\Delta x}$$

가 존재하면 함수 $y=f(x)$는 $x=a$에서 **미분가능**하다고 한다.

또한, 이 극한값을 함수 $y=f(x)$의 $x=a$에서의 **순간변화율** 또는 **미분계수**라 하고, 기호로

$$f'(a)$$

와 같이 나타낸다.

또, 함수 $f(x)$가 어떤 구간에 속하는 x의 모든 값에서 미분가능하면 함수 $f(x)$는 그 구간에서 미분가능하다고 한다.

이상을 정리하면 다음과 같다.

미분계수

함수 $y=f(x)$의 $x=a$에서의 미분계수는

$$f'(a)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(a+\Delta x)-f(a)}{\Delta x}$$

참 고 | 함수 $f(x)$의 미분계수 $f'(a)$를 구할 때 Δx 대신 h를 사용하여

$f'(a)=\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$ 로 나타내기도 한다.

예제 2 **함수 $f(x)=x^2+3x$의 $x=1$에서의 미분계수를 구하여라.**

풀이

$$\begin{aligned} f'(1)&=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(1+\Delta x)-f(1)}{\Delta x}\\ &=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\{(1+\Delta x)^2+3(1+\Delta x)\}-(1^2+3\cdot 1)}{\Delta x}\\ &=\lim_{\Delta x\to 0}(5+\Delta x)=5 \end{aligned}$$

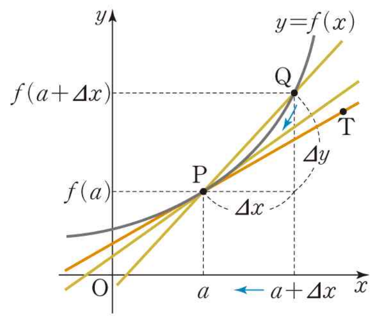
답 | 5

03 다음 함수의 $x=2$에서의 미분계수를 구하여라.

(1) $f(x)=-4x+3$

(2) $f(x)=x^2-2x-1$

미분계수의 기하학적 의미



함수 $y=f(x)$에서 x의 값이 a에서 $a+\Delta x$까지 변할 때, 함수 $y=f(x)$의 평균변화율

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{f(a+\Delta x)-f(a)}{\Delta x}$$

는 곡선 $y=f(x)$ 위의 두 점

$$\mathrm{P}(a,\ f(a)),\ \mathrm{Q}(a+\Delta x,\ f(a+\Delta x))$$

를 지나는 직선 PQ의 기울기를 나타낸다.

여기서 점 P를 고정하고 $\Delta x \to 0$으로 하면 점 Q는 곡선 $y=f(x)$를 따라 점 P에 한없이 가까워지고 직선 PQ는 직선 PT에 한없이 가까워진다. 이때 직선 PQ의 극한인 직선 PT를 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 P에서 이 곡선의 접선이라 하고, 점 P를 접점이라고 한다.

곧, 접선 PT의 기울기는 $\Delta x \to 0$일 때 직선 PQ의 기울기의 극한값, 곧 $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$의 극한값이므로

$$\lim_{\Delta x \to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x \to 0}\frac{f(a+\Delta x)-f(a)}{\Delta x}=f'(a)$$

가 된다.

따라서 미분계수 $f'(a)$는 함수 $y=f(x)$ 위의 점 $\mathrm{P}(a,\ f(a))$에서의 접선 PT의 기울기를 나타낸다.

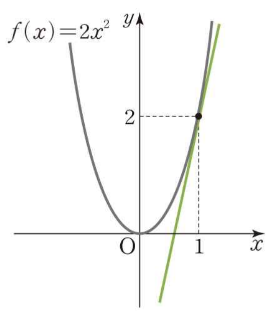
이상을 정리하면 다음과 같다.

미분계수와 접선의 기울기

함수 $y=f(x)$의 $x=a$에서의 미분계수 $f'(a)$는 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(a,\ f(a))$에서의 접선의 기울기와 같다.

예제 3 곡선 $f(x)=2x^2$ 위의 점 $(1,\ 2)$에서의 접선의 기울기를 구하여라.

풀이



구하는 접선의 기울기는 곡선 $f(x)=2x^2$의 $x=1$에서의 미분계수 $f'(1)$과 같으므로

$$\begin{aligned} f'(1)&=\lim_{\Delta x \to 0}\frac{f(1+\Delta x)-f(1)}{\Delta x}\\ &=\lim_{\Delta x \to 0}\frac{2(1+\Delta x)^2-2\cdot 1^2}{\Delta x}\\ &=\lim_{\Delta x \to 0}(4+2\Delta x)\\ &=4 \end{aligned}$$

답 | 4

04 다음 곡선 위의 주어진 점에서의 접선의 기울기를 구하여라.

(1) $f(x)=x^2-2$ $(1,\ -1)$ (2) $f(x)=-2x^2+3x$ $(2,\ -2)$

(평가) : http://matrix.skku.ac.kr/2012-Album/CLA-sample-Exams.html
http://matrix.skku.ac.kr/2012-Album/2012-LA-S-Midterm-Solution-F3.pdf
http://www.wolframalpha.com/

6-1 PBL

예시 1

주제 : 공학적 도구를 이용하여 미분계수의 기하학적 의미를 파악한다.

목표 : 공학적 도구를 이용하여 점 Q가 점 P로 가까워 질 때 f'과 $\dfrac{\triangle y}{\triangle x}$의 차를 확인한다.

1) 사전지식 함수

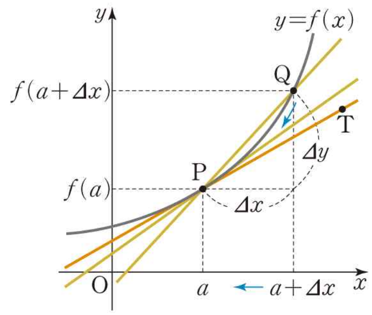
$y=f(x)$에서 x의 값이 a에서 $a+\Delta x$까지 변할 때, 함수 $y=f(x)$의 평균변화율

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{f(a+\Delta x)-f(a)}{\Delta x}$$

는 곡선 $y=f(x)$ 위의 두 점

$$\mathrm{P}(a,\ f(a)),\ \mathrm{Q}(a+\Delta x,\ f(a+\Delta x))$$

를 지나는 직선 PQ의 기울기를 나타낸다.



2) $f(x)=e^x$일 때 점$P(1,f(1))$를 고정시키고 점 $Q(2,f(2))$를 점P로 보낼 때, $f'(1)$의 값과 비교하여라

Sage를 이용하여 학습하여 보자

링크 : http://math1.skku.ac.kr/home/pub/647/

a. 함수값의 정의

```
f(x)=exp(x)
print "f(1)=",f(1)
print "f(2)=",f(2)
```

```
f(1)= e
f(2)= e^2
```

b. $\dfrac{f(2)-f(1)}{2-1}$의 값을 확인한다.

```
(f(2)-f(1))/(2-1)
```

```
-e + e^2
```

b-1. $\dfrac{f(2)-f(1)}{2-1}$의 실값을 확인한다.

(sage에서 RR(함수)를 입력하면 그 함수의 실수값을 확인 할 수 있다.)

```
RR((f(2)-f(1))/(2-1))
```

4.67077427047161

c. 간격을 $\left(\dfrac{1}{2}\right)^n$의 값으로 줄여 점 Q를 점 P를 근사시킨다.

c-1. $n=1$일때

```
f(2-1/2)
```

e^(3/2)

```
(f(3/2)-f(1))/(3/2-1)
```

-2*e + 2*e^(3/2)

```
RR((f(3/2)-f(1))/(3/2-1))
```

3.52681448375804

$n=2$일때

```
f(3/2-1/4)
```

e^(5/4)

```
(f(3/2-1/4)-f(1))/(3/2-1/4-1)
```

4*e + 4*e^(5/4)

```
RR((f(3/2-1/4)-f(1))/(3/2-1/4-1))
```

3.08824451601119

d. for문을 이용하여, $f'(1)$값과 $\dfrac{\triangle y}{\triangle x}$값의 차를 확인한다.

```
a=1 #점 P
b=2 #점 Q
f(x)=exp(x) #함수를 입력한다.
df(x)=diff(f(x),x) #함수의 미분값을 입력한다.
for i in range(10): #range(10)은 10개의 값을 찾는다는 의미, 10개의 값을 이용하여 차를 확인한다.
    d=(1/2)^(i+1)
    b= b-d
    n = (f(b)-f(a))/(b-a) #dy/dx의 값을 구한다.
    print RR(n-df(a))
```

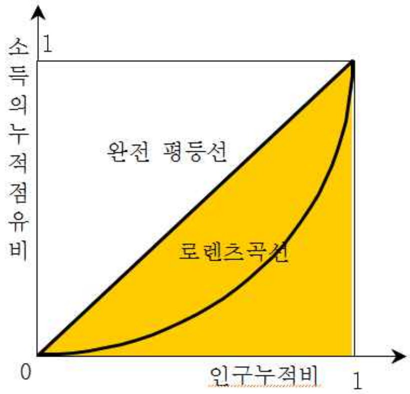
0.808532655298993
0.369962687552141
0.177198335212843
0.0867440229444085
0.0429190604427703
0.0213476173685478
0.0106459942770130
0.00531606390063644
0.00265630117928595
0.00132771821381539

결론 : 점 P를 고정하고 $\Delta x \to 0$으로 하면 점 Q는 곡선 $y=f(x)$를 따라 점 P에 한없이 가까워지고 그 값이 $f'(1)$값과 같아 짐을 확인하였다.

(서술형)

구분구적법 (by 박제남 교수님)

주제	구분구적법, 지니계수, 일계도함수, 이계도함수
학습목표	로렌츠곡선을 그릴 수 있다 구분구적법을 적용하여 계산할 수 있다 증가함수와 위로오목한 함수를 결정할 수 있다



미국의 통계학자 로렌츠(Lorentz, M. O)가 창안한 소득분포의 불균등도(不均等度)를 측정하는 방법으로 가로축에는 소득이 낮은 인구로부터 높은 순으로 비를 누적하여 표시하고, 세로축에는 각 인구의 소득수준을 누적한 비로 표시하는 것을 로렌츠 곡선이라고 한다. 따라서 로렌츠곡선 $L(x)$의 정의역은 $0 \le x \le 1$이고 $L(0)=0, L(1)=1$이다. 한편, $100\,x$는 비율이다.
예를 들어, 전국 약 8,700의 표본가구를 대상으로 가구에서 가계부를 직접기입하는 방법을 이용하여 조사한 2011년 1/4분기 가계소득은 월평균 385만8천원으로 전년동기대비 3.5% 증가하였다. 이는 고용확대 등에 따른 근로소득 및 사업소득의 증가와 정부 복지지출 확대에 따른 이전소득이 증가한 것으로 분석된다. 5분위별 월평균소득분포(2011년 1/4분기)를 알아보자. 5분위별 소득이란 표본가구를 최저소득가구로부터 최고소득가구까지 5분위별로 구분하여(표본가구의 최저소득 가구비율 20%가 제1분위임) 각 분위의 소득을 전체표본가구 소득의 백분위로 나타낸 것을 말한다. 다음 표에서

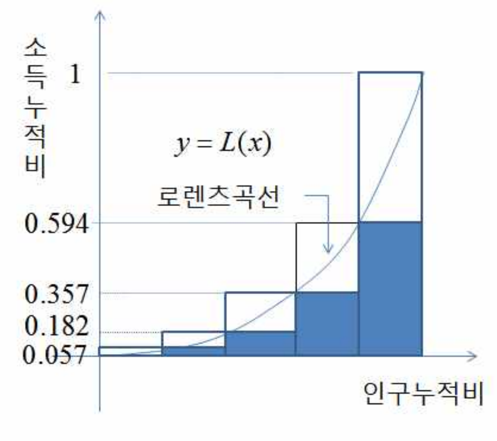
$$L(0.2) = 0.057,\ L(0.4) = 0.182$$

이다.

소득분위	1분위	2분위	3분위	4분위	5분위
월평균소득(천원)	1106.3	2409.6	3370.9	4568.3	7831.3
소득 점유율(%)	5.7	12.5	17.5	23.7	40.6
누적비	0.057	0.182	0.357	0.594	1

(출처: 통계청 2011년 5월 21일 보도자료)

위 자료를 바탕으로 로렌츠곡선을 그리면 다음과 같다.



이제 불균등도를 측정하는 방법을 알아보자. 완전 평등선 $y=x$와 로렌츠 곡선 사이의 넓이를 완전 평등선 아래의 삼각형의 면적 1/2로 나눈 비율을 지니 계수(Gini coefficient)라고 한다. 완전 균등 상태의 지니계수는 0이고 완전 불균등 상태의 지니계수는 1이다. 지니계수의 값이 커지면 불균등도 커지고, 지니계수가 작을수록 부의 균등 분배가 이루어지고 있음을 나타낸다. 일반적으로 0.50이상이면 고불균등 분배이고, 0.40 이하이면 저불균등 분배라고 한다.

【문제 1】 전국표본가구의 5분위별 소득분포(2011년 1/4분기)를 사용하여 지니계수를 구하여봅시다.

【문제 2】 또한, 로렌츠곡선 $L(x)$ $(0 \le x \le 1)$의 개형을 그리고 로렌츠곡선 $L(x)$ $(0 \le x \le 1)$에 대하여

(1) $L(x) \le x$, (2) $L'(x) > 0$, (3) $L''(x) > 0$

을 설명하여봅시다.

【문제 3】 최근 5년간 우리나라 지니계수를 통계청 홈페이지에서 알아봅시다. 지니계수의 변화 이유를 다음 글을 200(±20)자로 요약해봅시다.

(□□일보 2009년 6월 5일 사설: 2000년 이후 빈부격차 가장 많이 벌어졌다)

글로벌 경제위기의 충격이 저소득 서민계층을 가장 먼저 덮치면서 우리 사회 빈부격차가 크게 확대되고 있다. 지난 1분기에 2인 이상 가구 중 하위 20% 소득계층의 월 평균소득은 85만6000원으로 1년 전보다 5.1% 줄었다. 반면 상위 20% 계층 월 평균소득은 742만5000원으로 1.1% 늘었다. 이에 따라 상위 20% 소득을 하위 20% 소득으로 나눈 '소득 5분위 배율'은 8.68배로 작년 1분기 8.14배보다 크게 나빠졌다. 2000년 전국 가구 소득 통계를 만들기 시작한 이후 빈부 격차가 가장 많이 벌어졌다.

가장 큰 원인은 경기침체로 저소득층 일자리부터 사라지고 있는 데 있다. 기업들은 경영 악화로 인력을 줄여야 할 때 핵심인력인 정규직 감원은 되도록 뒤로 미루고 비정규직부터 내보내기 마련이다. 근로기간 1년이 안 된 임시·일용직 근로자가 지난 3월 기준 537만4000명으로 1년 전보다 26만4000명이나 감소한 것도 그 때문이다. 상가·식당·숙박업 같은 자영업 일자리도 많이 줄었다.

외환위기 때 실직자 중엔 대기업 명예퇴직자가 적지 않았다. 이들은 저축해둔 돈도 있었고 퇴직 때 상당한 보상금도 받아 그나마 생계를 유지하고 버틸 여력이 있었다. 그러나 이번 경기침체 와중에 일자리를 잃은 비정규직과 영세 자영업자, 저소득층에겐 그런 안전판이 없다. 수입이 끊기면 곧바로 빈곤의 수렁에 빠져들 수밖에 없는 처지다. 당장 생계가 막막해지고, 인간으로서 자존심이 무너지고, 가정이 해체되고, 급기야 노숙자로 거리를 떠도는 비극이 벌어지게 된다.

실제 소득이 최저생계비(4인 가구 기준 133만원)에도 못 미쳐 정부 지원을 받는 기초생활보장 수급자가 올 들어 매달 1만명씩 늘고 있다. 4월 말 현재 기초생활보장 수급자는 157만3000명으로 2000년 이 제도가 도입된 이래 가장 많아졌다. 먹을거리를 기증받아 나눠주는 푸드뱅크 이용자도 작년 11만6000명에서 올해는 14만3000명으로 23% 늘었다.

한국보건사회연구원은 올해 성장률이 정부 전망대로 마이너스 2%로 떨어질 경우 소득이 최저생계비에 미치지 못하는 '근로빈곤층'이 98만명 늘어날 것으로 예측했다. 2007년 282만명이었던 근로빈곤층이 올 연말 380만명으로 급증한다는 것이다. 빈부격차와 소득 양극화가 지금보다 더 심각해질 것이라는 얘기다.

빈곤층이 늘고 빈부 격차가 커지면 사회·정치적 갈등과 불만이 커가고 그러다 어떤 계기를 만나면 폭발적으로 분출할 수 있다. 이 정부에 멍에처럼 따라붙는 '부자 정권' 이미지가 사태를 더 악화시킬 위험도 있다. 제2의 촛불이나 용산 철거민 사태 같은 일이 다시 벌어질 수 있다는 것이다.

정부는 올 들어 10여 차례에 걸쳐 저소득층과 실업자, 영세 자영업자 등 취약계층 대책을 내놓았다. 그러나 정부 재정만으로 우리 사회의 복지 사각지대를 해소하기는 어렵다. 우리 경제력으로 감당할 수 있는 복지의 수준엔 한계가 있다. 정부가 노력해야 할 부분도 있지만 민간 부문 역할도 중요하다. 우리 사회의 여유 있는 계층이 불우한 이웃들에게 따뜻한 배려와 관심을 기울이며 사회 통합의 짐을 나눠지는 모습을 보여야 한다.

<주제1 : 사회계층간 이동성>

[문제 1] 다음 제시문을 읽고 물음에 답하시오.

한 학생의 수능점수는 다음의 함수로 나타내어진다고 가정하자.

$$f(x,y,z)$$

단 여기서

x는 그 학생 부모의 교육 수준,

y는 학생 가족의 소득이다. 그리고

z는 그 밖의 모든 변수들을 아우르는 변수이다.

또한 z는 x 그리고 y와는 상관관계가 없는 변수이다, 그러나 학생 가족의 소득 수준은 학생 부모의 교육 수준에 의해 정해진다고 가정하자. 여기서 학생 부모의 교육 수준이 매우 작은 양만큼 변화하였을 때, 학생 가족의 소득은 대략 A의 비율로 변화한다고 하자. 이때, A는 z를 상수로 생각했을 때 y에 대한 x의 도함수, $\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$로 생각할 수 있다. 이를 기호 $\frac{\partial y}{\partial x}$로 표시하기로 하자.

한편, z와 소득수준을 고정시키고, 학생 부모의 교육 수준을 매우 작은 양만큼 변화하였을 때, 학생의 수능 점수는 대략 B (또는 $f(x,y,z)$에 대한 x의 도함수, $\frac{\partial f(x,y,z)}{\partial x}$)의 비율로 변화함을 알 수 있다. z와 학생부모의 교육수준을 고정시키고, 소득수준을 매우 작은 양만큼 변화하였을 때, 학생의 수능점수는 대략 C (또는 $f(x,y,z)$에 대한 y의 도함수, $\frac{\partial f(x,y,z)}{\partial y}$)의 비율로 변한다.

[1-1] z만을 고정시키고, x를 매우 작은 양만큼 변화시켰을 때, 학생의 수능점수는 대략 어떤 비율로 변화하는 지를 A, B, C를 이용하여 적절하게 나타내어라.

[1-2] 수능점수가 실제 저 함수로 나타내어진다는 가정하자. A, B, C에 관한 적절한 가정하에서, 소득의 평등과 교육의 평등의 상관관계에 대해 논하여라.

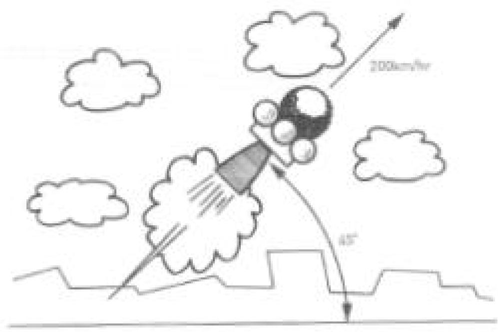
▲ **수리문항(문제2) 예시 답안**

(1) 대략 $B+A\times C$만큼의 (또는 $\frac{\partial f(x,y,z)}{\partial x}+\frac{\partial y}{\partial x}\frac{\partial f(x,y,z)}{\partial y}$) 비율로 변화한다.

(2) 오늘 학부모의 교육수준은 변화시킬 수 없는 것이지만, 정부정책에 의해 오늘은 가처분 소득은 바뀔 수 있다. 오늘의 학생들은 내일의 학부모들이 될 것이고, 내일 다시 가처분 소득을 바꾸는 정책을 사용하기보다는, 오늘 가처분 소득을 평등하게 만드는 정책을 사용하여, 내일의 교육의 평등을 이루면, 그것은 더 미래의 소득의 평등을 위해 중요한 역할을 하게 될 것이다. 특히, A의 값이 크면 클수록, 오늘의 소득의 평등을 위한 정책은 더욱 큰 효과를 발휘하게 될 것이다.

<주제2 : 고기완자를 날려라!>

[문제 2] 주어지는 고기완자를 지구 밖 우주로 발사시키려 한다. 고지완자에 엔진을 달아 땅에서 45도로, 시간당 200km의 속도로 날려 보내려 한다.



[2-1] 고기완자의 고도는 얼마나 빨리 변하겠는가?

[2-2] 각도를 30도로 할 때와 60도로 할 때는 45도일 때와 비교하여 각각 어떤 변화가 있겠는가?

[2-3] 위에서 얻은 지식을 일반화하여 ~~

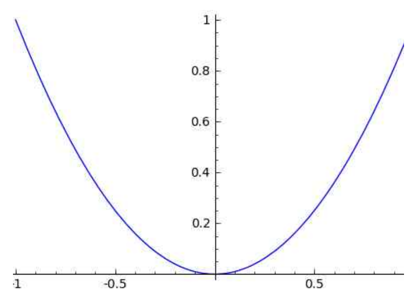
5. 공학적 도구

(1) Sage 소개

Sage를 사용하여 $f(x)=x^2$의 그래프를 그려 보자.

```
plot(f) ; #그래프를 그리는 Sage명령어
```

결과 :



이제 Sage를 사용하여 $f(x)=x^2$의 $x=2$에서의 미분계수를 구하여 보자.

f(x)=x^2 ; $f(x)=x^2$를 정의함

```
f'(x)=diff(f(x)) ; # diff-미분에 대한 Sage명령어
```

```
f'(2)
```

결과 :

```
4
```

(2) Sage를 사용하여 $f(x)=4x^3-2x^2+3x-1$의 그래프를 그리고 $x=2$에서의 미분계수를 구하여라.

6. BBS

7. 결론

8. 평가

9. 기타

Sage-Math는 인터넷 웹 환경을 기반으로 하는 수학 연산용 도구이다. 이 도구는 2008년 4월에 미국 워싱턴대학을 중심으로 개발되었으며, 현재 그 기능은 Web-Mathematica와 비교할 만큼 강력한 기능을 가지며, 고가의 상업용 소프트웨어들(Mathematica, Maple, Matlab)을 별도로 설치하지 않고도, (약간의 프로그래밍 작업을 추가하면) 인터넷 웹 브라우저 <참고: Chrome에서 internet explorer 보다 더 잘 작동한다>로 접속하여 언제 어디서나 사용할 수 있도록 구성되어 있다. 수많은 무료 Sage 서버가 세계에 있으니 어느 것을 사용해도 되며, 무료로 프로그램을 다운받아 자신의 PC에 설치하여 사용해도 된다. (http://wiki.sagemath.org/SageServer 참고)

(동영상 설명) http://matrix.skku.ac.kr/2012-LAwithSage/interact/

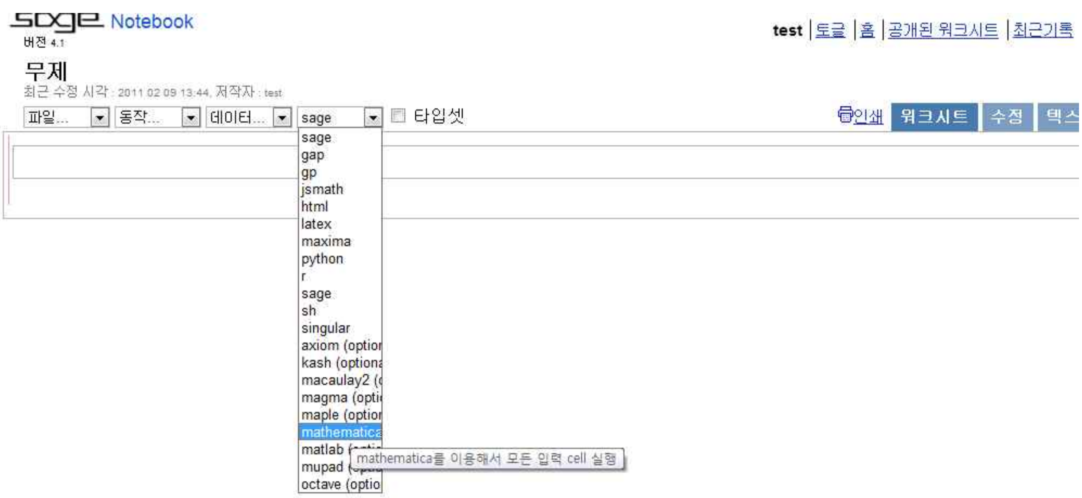


그림 1 Sage에서 다른 소프트웨어의 프로그램 사용의 예(그림은 mathematica)

성균관대학교 BK21 수학적 모델링 HRD 사업단 연구실에서는 이미 자체서버를 구축하여, 한국형 Sage-Math모델을 개발하고 기본 검토와 실험을 마친 상태이다. 현재 사용가능한 서버와 ID, Password는 아래와 같다.

http://sage.skku.edu (Single cell 서버)
http://math1.skku.ac.kr (ID: skku1 Password: math)
http://math2.skku.ac.kr (계정 및 암호 설정 가능)
http://math3.skku.ac.kr (Mobile Server용)
http://mathmodel.skku.edu (계정 및 암호 설정 가능)
http://sagemath.ze.to/ (Sage-Math와 선형대수학)

이 시스템은 인터넷이 접속가능한 컴퓨터에서, 크롬 또는 인터넷 익스플로러와 같은 웹

서비스를 활용할 수 있는 프로그램만 있으면 바로 사용이 가능하다. 우선 성균관대학교에서 활용 중인 Sage-Math 시스템에 접속하여 미적분학 실습을 하기 위해 아래와 같이 입력하자.

1. http://math1.skku.ac.kr 시스템에 인터넷으로 접속
2. 사용자이름에 skku1 Password에 math를 입력하여 로그인
3. 왼쪽 상단에 "새 워크시트(New worksheet)"를 이용하여 새 워크시트를 준비하고 Untitled에 본인의 이름 삽입.

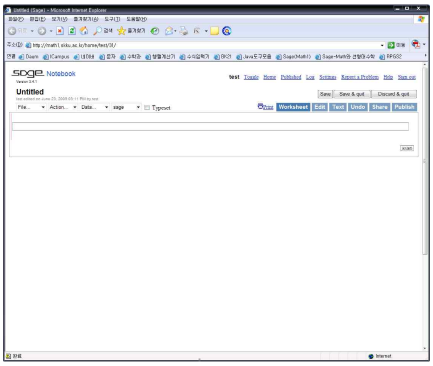


그림 3 새 워크시트를 열어서 준비완료된 모습

http://matrix.skku.ac.kr/sage/

QR 코드

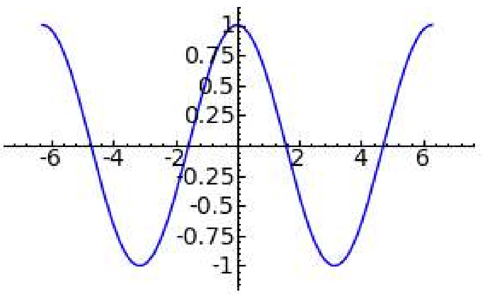
QR코드 통해 학습했던 내용을 스마트폰이나 여러 태블릿 PC를 이용하도록 할 것이다.

곡선 $y = \cos x$의 그래프를 그려보아라.

Ans

http://math3.skku.ac.kr/spla/story_telling_ex1

```
f=cos(x)
plot(f,(x,-2*pi,2*pi))
```



스마트폰과 QR코드를 이용한 학습방법

1. 다음 그림과 같이 스마트폰(또는 태블릿 PC)에 여러 가지 "QR코드 스캐너" 프로그램 중

하나를 설치한다.

그림 4

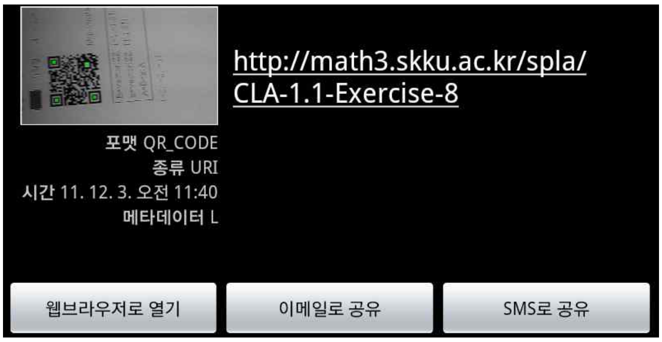


그림 5

2. 스마트폰에서 설치한 “QR코드 스캐너”를 실행하고 책에 있는 QR코드를 스캔한다.
3. 웹브라우저로 내용을 열면 다음 그림과 같이 문제를 직접 실습할 수 있는 도구를 확인할 수 있다. 가운데 코드가 있는 부분을 터치하여 값을 바꾼뒤 “Evaluate(실행)” 버튼을 누르면 같은 유형의 다른 문제를 쉽게 해결할 수 있다.

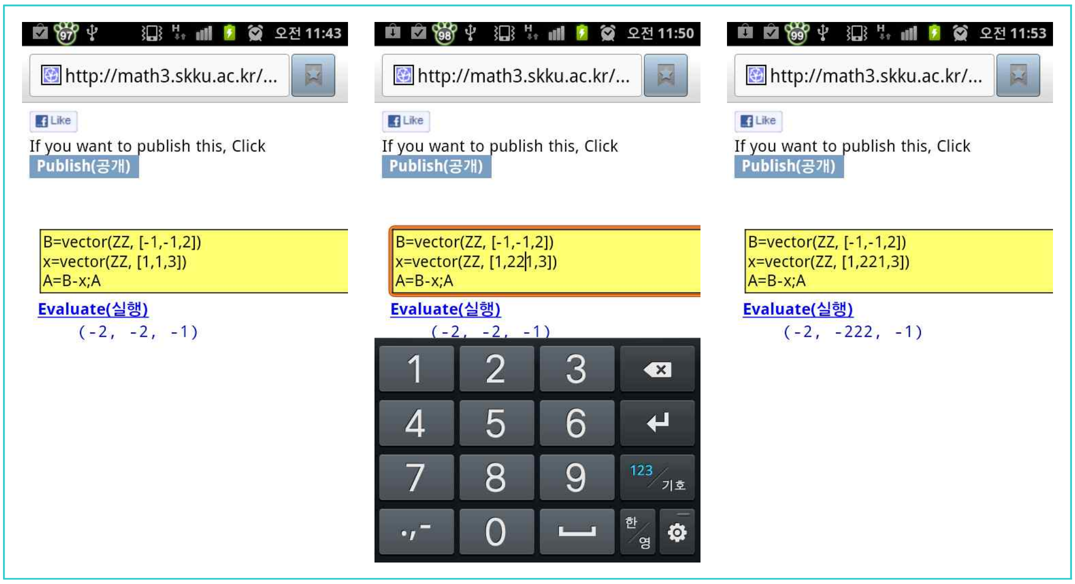


그림 6

4. 학습한 결과는 “Publish(공개)” 버튼을 통해 인터넷 상의 웹페이지로 저장이 가능하며, 그 웹페이지는 ‘이메일’, ‘트위터’, ‘페이스북’, ‘네이버 미투데이’, ‘다음 요즘’과 같은 소셜 네트워크 시스템을 이용하여 자신의 계정에 또는 다른 사람과 공유할 수 있다. 교재 속의 웹자료를 활용시 같이 제공한 QR 코드가 편리하게 이용되기를 기대한다.

그림 7

C<< Sage-Math를 이용하여 계산하기

위와 같이 Sage-Math의 준비가 끝났으면 이제 이를 활용하여 선형대수학 학습에 있어서 어떤 계산을 할 수 있는지 아래의 몇 가지 예제를 통하여 확인해보도록 하자.

1. 함수의 극한 구하기

링크 : http://math1.skku.ac.kr/home/pub/625/
먼저 함수를 구할 수 있다. 예를 들어 다음 삼각함수의 극한을 구하여 보자

$$\lim_{t\to 0}\frac{\sin t}{t} \tag{1}$$

삼각함수의 극한을 Sage-Math로 해결하는 하여보자.
이 명령어를 이용하기 위해서는 먼저 변수를 지정하고 아래와 같이 함수식을 입력한다.

```
var('t')
f(t)=sin(t)/t;f(t)
f.limit(t = 0)
```

Ans. 1

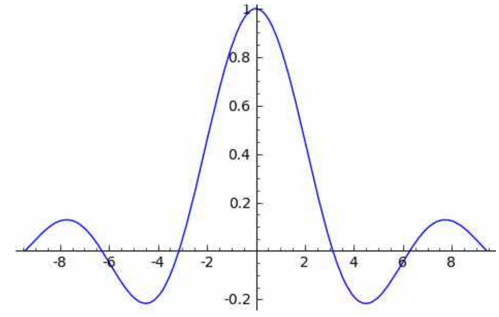
이뿐만 아니라 Sage의 시각화를 이용하여 이를 확인 할 수 있다.

```
plot(f,(t,-3*pi,3*pi))
```

Ans.

위 명령어를 이용하여 이 문제의 해는 $\lim_{t\to 0}\frac{\sin t}{t}=1$임을 쉽게 확인 할 수 있다.

위 명령어를 조금 수정하며 $\lim_{t\to\infty}\frac{\sin t}{t}$의 값도 찾을 수 있다.




```
var('t')
f(t)=sin(t)/t;f(t)
f.limit(t = oo)
```

Ans. 1

2. 함수의 합성과 역함수 구하기

링그 : http://math1.skku.ac.kr/home/pub/626/

$f(x)=\sin(x)$이고 $g(x)=x^2$일 때 $f(g(x))$를 구하고, 역함수를 구하여라.

(*Ans.* 는 Sage의 출력값이고 옆에 괄호는 그에 대한 수식이다.)

1) 합성함수 구하기

```
var('x,y')
f(x)=sin(x)
g(x)=x^2
F(x)=f(g(x))
F(x)
```

Ans. sin(x^2) (즉, $\sin(x^2)$)

2) 합성함수의 역함수 구하기

```
h(x) = solve(x == F(y), y)[0].rhs()
h(x)
```

Ans. -sqrt(arcsin(x)) (즉,$-\sqrt{\sin^{-1}(x)}$)

위 문제에서 알 수 있듯이 공학적 도구를 이용하며, 학생들은 자신이 배운 계산과정(알고리즘)을 이용하여 자신이 알고 있는 것보다 더 많은 내용을 습득할 수 있으며, 많은 문제를 단지 함수만 변경 함으로써 어려운 문제를 풀 수 있다.

3. 함수의 미분과 함성함수의 미분

링크 : http://math1.skku.ac.kr/home/pub/627/

가)다항함수의 미분

$f(x) = x^2 + 3x + 2$일 때 $\dfrac{df(x)}{dx}$를 구하여라.

```
f(x)=x^2+3*x+2
diff(f,x)
```

Ans. x |--> 2*x + 3 (즉, $2x+3$)

위 명령어 diff(f,x)를 diff(f,x,x)로 수정하면 f''도 구할 수 있다.

```
f(x)=x^2+3*x+2
diff(f,x,x)
```

Ans. 2

나) 삼각함수의 미분법

$g(x) = \sin(x)$일 때, $g'(x)$를 구하여라.

```
g(x)=sin(x)
diff(g,x)
```

Ans. x |--> cos(x)(즉, $\cos(x)$)

다) 함성 함수의 미분법

위 두 함수 $f(x)$,$g(x)$에 대하여, $f(g(x))$및 $g(f(x))$의 도함수를 구하여라.

```
F(x)=f(g(x))
diff(F,x)
```

Ans. x |--> sin(x)^2 + 3*sin(x) + 2 (즉, $2\sin(x)\cos(x)+3\cos(x)$)

```
G(x)=g(f(x))
diff(G,x)
```

Ans. x |--> (2*x + 3)*cos(x^2 + 3*x + 2) (즉, $(2x+3)\cos(x^2+3x+2)$)

4. 함수의 적분과 그 응용

링크 : http://math1.skku.ac.kr/home/pub/630/

가)부정적분

$f(x)=(x+1)^{10}$일 때 $\int f(x)dx$를 구하여라.

```
f(x)=(x+1)^10
integral(f)
```

Ans. x |--> 1/11*(x + 1)^11 (즉, $\frac{1}{11}(x+1)^{11}+C$)

나) 정적분

$\int_1^3 x^3\sqrt{x^2-1}\,dx$를 구하여라.

```
G(x)=g(f(x))
diff(G,x)
```

Ans. 464/15*sqrt(2)

다) 두 곡선사이의 도형의 넓이

곡선 $\ln x$와 원점에서 이 곡선에 그은 접선 및 x축으로 둘러싸인 도형의 넓이를 구하여라.

Ans. 곡선 $y=\ln x$위의 점 $(t, \ln t)$에서의 접선의 방정식은 $y-\ln t=\frac{1}{t}(x-t)$이고 원점을 지나므로 이 곡선은 $y=\frac{1}{e}x$이다.

구하는 도형의 넓이는 곡선 $y=\ln x$와 x축 및 직선 $y=\frac{1}{e}x$로 둘러싸인 도형의 넓이이므로 $\int_0^1 (e^y-ey)dy$를 구하면 된다.

```
var('y')
integral(exp(y)-exp(1)*y,0,1)
```

Ans. 1/2*e - 1

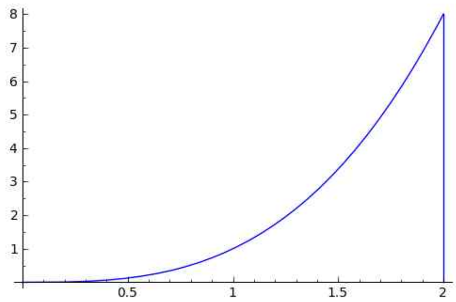
라) 회전체의 부피

원 $y=x^3$과 $x=2$, x축으로 둘러싸인 도형을 x축 둘레로 회전시켜서 생긴 회전체의 부피 V를 구하여라.

시각화

```
s=plot(x^3,(x,0,2))
s+=line([(2,0),(2,8)])
s.show()
```

Ans.

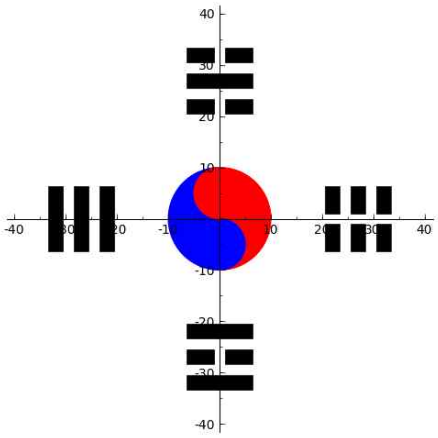



```
pi*integral(x^6,0,2)
```

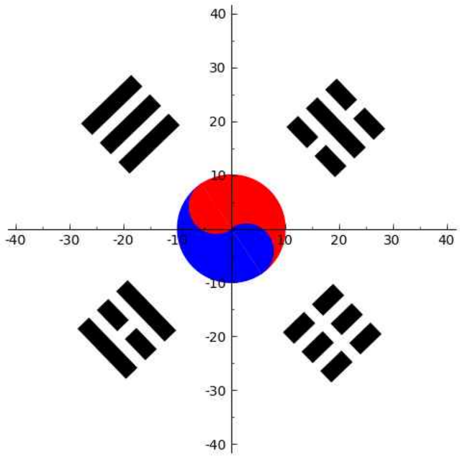
Ans. 128/7*pi

==========여기까지 수정하였습니다.====================

. 함수의 적분과 그 응용



1900년 파리 박람회 장소에 계양했던 태극기(4번째)



1949년 10월, 42인 대한민국 국기제정위원회에서 결정된 현재의 태극기(5번째)

선형변환을 이용하여 태극기의 변천과정을 그래프에 표현할 수 있다.
http://math2.skku.ac.kr/home/hin0823/31/

앞서 소개한 Sage-Math의 한글버전의 개발은 교육현장에서 적극적으로 활용되어야만 그 효과를 볼 수 있다. 이제까지 많은 수학 관련 프로그램들이 개발되어 왔지만, 효과적으로 수업환경에 활용되지 못한 이유 중 다른 하나는 수학 관련 소프트웨어의 개발에만 치중하여, 개발품이 긍정적인 교육효과를 이끌어낼 수 있도록 교육현장에 적절하게 적용하는 부분에 대한 연구와 성공모델의 개발 및 확산을 간과하였기 때문이다. 성균관대학교에서는 인터넷을 이용하는 Sage-Math의 장점을 최대한 살려 활용가능한 교수 학습자료를 제작 및 공개해오고 있다. Sage-Math를 활용한 다양한 문제 풀이과정을 선정한 미적분학 교재에 맞추어서 제작했으며, 그 내용을 아래의 웹페이지에 공개했다.

http://matrix.skku.ac.kr/2011-sage/sage-la/

==
※참고할 수 있는 자료 모음

추가하면 좋을 내용

16. $x^2+y^2=r^2$

17. $x^2/a^2+y^2/b^2=1$

18. $(x+y)^{1/2}=(x-y)^{-1/2}$

19. $(x-3)y^2=x^2+4$

20. 루터포드가 빙판을 달릴 때 속도는 $v=3-t^2$이다. $t=0$일 때부터 루터포드가 더 이상 앞으로 나가지 않을 때까지 달린 거리는 얼마인가?

21. 몽골이 진흙바닥인 언덕길을 달릴 때 속도는 $dv/dt=-2v$이다. $t=0$일 때 $v=5$라면, 속도가 0.01이 될 때까지 얼마의 시간이 걸리겠는가? 또 그때까지 얼마의 거리를 달려왔겠는가?

※ 다음 부정적분을 구하여라. (22~25)

22. $\int(4x^3-2x+5)dx$

23. $\int x\sqrt{x^2-1}\,dx$

24. $\int\frac{1}{1+x^2}dx$

25. $\int 4x^2\sin^2 x\,dx$

※ 주어진 조건을 만족하는 y의 식을 구하여라. (26~28)

26. $dy/dx=5x+4$; $y=3,\ x=2$

27. $d^2y/dt^2=5$; $dy/dt=3,\ y=2,\ t=0$

28. $d^2y/dt^2=2t$; $dy/dt=0,\ y=0,\ t=0$

29. 몽골이 스프링으로 된 놀이기구를 탈 때 다음과 같은 힘이 작용한다. $F_{스프링}=-500x$, $F_{마찰}=-10dx/dt$. 몽골의 무게는 1000이다. $t=0$일 때 기구의 속도는 0이고($dx/dt=0$), 위치는 20($x=20$)이다. 이 움직임을 나타내는 미분방정식을 구하고, 방정식의 해인 t에 대한 함수 x를 구하여라.

30. 어떤 전자를 어떠한 힘 F에 반하여 a에서 b까지 움직일 때 필요한 일의 양은 다음과 같다.

$$W=\int_a^b F(x)\,dx$$

$a=100,\ b=10,\ F(x)=-kx^{-2}$일 때 일의 양은 얼마인가?

※ 다음 정적분의 값을 구하여라. (31~39)

31. $\int_4^5\frac{x-1}{(x-2)(x-3)}dx$

32. $\int_0^{10}4x^2dx$

33. $\int_0^{\pi/6}\tan 2x\,dx$

34. $\int_0^{10}(e^x-x^3)\,dx$

35. $\int_1^2 x^4\sin(x^5)\,dx$

36. $\int_0^{\pi/2}\sin x\cos x\,dx$

37. $\int_2^3 x^2\sin x\,dx$

38. 두 곡선 $y_1=\sin x$와 $y_2=x^2-\pi x$ 사이의 넓이를 구하여라.

39. 내가 이 왕국을 점령하면 제일 먼저 삼각형의 무대가 있는 음악당

35. 이 문제는 처음에는 어려워 보였지만 곧 왕이 치환적분을 위한 완벽한 대입 공식을 기억해 냈다.

$u=x^5$라 하면, $du=5x^4dx$

$$\int_1^2 x^4\sin(x^5)dx=\frac{1}{5}\int_1^{32}\sin u\,du=\frac{-1}{5}(\cos 32-\cos 1)=-0.059$$

36. 부분적분을 이용해 이 문제를 풀려고 할 때 트리고노메트리스가 이 문제를 훨씬 쉽게 바꿀 수 있는 삼각함수의 법칙 한 가지를 기억해 냈다.

$$\sin x\cos x=\frac{1}{2}\sin 2x$$

$$\int_0^{\pi/2}\sin x\cos x\,dx=\frac{1}{2}\int_0^{\pi/2}\sin 2x\,dx=-\frac{1}{4}\Big[\cos 2x\Big]_0^{\pi/2}$$

$$=-\frac{1}{4}(\cos\pi-\cos 0)=\frac{1}{2}$$

37. 이번 경우에는 부분적분 외에는 아무 방법이 없었다. 우리는 우선 이 정적분을 부정적분으로 취급하여 부정적분을 구한 후 적분 한계를 집어넣어 정적분의 값을 구하기로 했다. 우선, $u=x^2$이라 하고 다음 동식들을 구해 보았다.

$$dv=\sin x\,dx$$

$$du=2x\,dx$$

$$v=-\cos x$$

$$\int x^2\sin x\,dx=-x^2\cos x+\int\cos x\,2x\,dx$$

그리고 부분적분을 한 번 더 적용했다.

$u=x$라 하면,

$$du=dx$$

$$du=\cos x\,dx$$

$$v=\sin x$$

$$\int x^2\sin x\,dx=-x^2\cos x+2x\sin x-\int 2\sin x\,dx$$

$$\int_2^3 x^2\sin x\,dx=\Big[-x^2\cos x+2x\sin x+2\cos x\Big]_2^3$$

$$=-7\cos 3+6\sin 3+2\cos 2-4\sin 2$$

$$=3.3$$

38. 우선 두 선의 거리를 다음과 같은 새로운 함수로 정의했다.

$$y=y_1-y_2=\sin x-x^2+\pi x$$

"이제 어떠한 적분한계를 써야 하는가를 결정해야 합니다."

레코디스가 말했다.

대략적으로 그래프를 그려 본 결과, 이 문제는 두 곡선이 교차하는 점 사이를 적분해야 함을 깨달았다. 교차점 중 하나는 y_1과 y_2가 모두 0인 점으로 $x=0$이었고, 또 다른 교차점은 $x=\pi$였다. 따라서 우리는 $x=0$에서 $x=\pi$까지를 적분하여 두 곡선 사이의 넓이를 구하기로 했다.

$$A=\int_0^{\pi}(\sin x-x^2+\pi x)\,dx=\Big[-\cos x-\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{2}\pi x^2\Big]_0^{\pi}$$

$$=1+1-\frac{1}{3}\pi^3+\frac{1}{2}\pi^3$$

$$=7.17$$

39. 중심의 점은 중앙선 위에 있어야 한다는 것을 깨닫고 난 후, 빌더의 무게중심 공식을 사용했다.

− 처음 그림은 연습문제를 스캔한 파일이고, 위 그림은 그 연습문제에 대한 해답을 스캔한 파일입니다. "이야기로 아주 쉽게 배우는 미적분"에서 사용한 방식으로, 해답을 답을 확인하는 과정으로만 사용한 것이 아니라 이야기를 넣어..........(이 부분에는 해답지를 읽어 보도록 유도 했다는 말이 들어 갔으면 좋겠습니다.)

[2] 동양에서 도형의 부피 연구

교사 : 동양에서는 어떻게 이러한 도형의 부피를 구했을까요? 구장산술을 쓴 유휘가 같은 방법으로 사각뿔의 부피를 구했답니다.

동영상 자료	EBSi , 수학의 원리 마테마티카 EBSi> 뉴나공감> 창의학습 클립> 수학의 원리> 생각으로 엮어낸 부피의 세계, 뿔의 부피 (09:13~09:21) http://www.ebsi.co.kr/ebs/ebsi/jsp/pot/potg/RetrieveCreateStudyClipInfo.jsp?sbjtId=S20100002117

교사 : 또한 중국 남송의 학자 조충지도 같은 방법으로 구의 부피를 구해내기도 했습니다.

동영상 자료	EBSi , 수학의 원리 마테마티카 EBSi> 뉴나공감> 창의학습 클립> 수학의 원리> 생각으로 엮어낸 부피의 세계, 뿔의 부피 (09:22~09:34) http://www.ebsi.co.kr/ebs/ebsi/jsp/pot/potg/RetrieveCreateStudyClipInfo.jsp?sbjtId=S20100002117

– 한 책에 다 담을 필요 없이 우리가 만들어 놓은 동영상이나 기타 자료를 다음의 방식으로 링크 시키는 것도 좋은 방법인거 같습니다.

수학과 교육과정

(교육인적자원부 고시 제2007-79호
2007년 2월 28일 부총리 겸 교육인적자원부장관이 고시한 교육과정 내용을
책자로 발행(2007년 7월 31일)한 최종 파일입니다)

영 역	내 용
함수의 극한과 연속	· 함수의 극한
	· 함수의 연속
다항함수의 미분법	· 미분 계수
	· 도함수
	· 도함수의 활용
다항함수의 적분법	· 부정적분
	· 정적분
	· 정적분의 활용

2. 목 표
수학적 개념, 원리, 법칙을 이해하고, 수학적으로 사고하고 의사소통하는 능력을 신장하여 여러 가지 문제를 합리적이고 창의적으로 해결하며, 수학의 실용성을 인식하여 수학에 대한 긍정적 태도를 가진다.

가. 연속함수, 미분과 적분, 확률과 통계에 관련된 개념, 원리, 법칙과 이들 사이의 관계를 이해하고 이를 활용하는 능력을 기른다.

나. 여러 가지 현상을 관찰, 분석, 조직하여 수학적으로 나타내는 능력을 기른다.

다. 수학을 통하여 여러 가지 문제를 합리적으로 해결하는 능력을 기른다.

라. 수학적으로 사고하고 의사소통하는 능력을 기른다.

마. 수학의 가치를 이해하여 수학에 대한 관심과 흥미를 지속적으로 가지며, 수학에 대한 긍정적 태도를 기른다.

가. 기존 교재를 활용하여 해결한다. 다. 교수님께서 말씀하신대로 CAS를 이용하여 명령어를 주고, 쉬운 문제를 이용하여 문제를 푸는 방법을 가르친 후 확장된 개념을 이용한다. 마. 수학사를 활용한다.

목 표
㈎ 함수의 극한과 연속 1 함수의 극한 ① 함수의 극한의 뜻을 안다. ② 함수의 극한에 관한 성질을 이해하고, 여러 가지 함수의 극한값을 구할 수 있다.

2 함수의 연속

① 함수의 연속의 뜻을 안다.

② 연속함수의 성질을 이해하고, 이를 활용할 수 있다.

<용어와 기호> 구간, 닫힌 구간, 열린 구간, 반닫힌(반열린) 구간, 좌극한, 우극한, 연속, 불연속, 연속함수, 최대·최소의 정리, 중간값의 정리, $[a,\ b]$, $(a,\ b)$, $[a,\ b)$, $(a,\ b]$, $\lim_{x \to a-0} f(x)$, $\lim_{x \to a+0} f(x)$, $\lim_{x \to a} f(x)$

<교수.학습상의 유의점>

① 함수의 극한에 관한 정의와 성질은 수열의 극한과 관련지어 이해하게 한다.

㈏ 다항함수의 미분법

1 미분계수

① 미분계수의 뜻을 알고, 그 값을 구할 수 있다.

② 미분계수의 기하학적 의미를 안다.

③ 미분가능성과 연속성의 관계를 이해한다.

2 도함수

① 함수 $y=x^n$(n은 양의 정수)의 도함수를 구할 수 있다.

② 함수의 실수배, 합, 차, 곱의 미분법을 알고, 다항함수의 도함수를 구할 수 있다.

3 도함수의 활용

① 접선의 방정식을 구할 수 있다.

② 함수의 증가와 감소를 판정할 수 있다.

③ 함수의 극대와 극소를 판정할 수 있다.

④ 함수의 그래프의 개형을 그릴 수 있다.

⑤ 방정식과 부등식에 활용할 수 있다.

⑥ 속도와 가속도에 관한 문제에 활용할 수 있다.

<용어와 기호> 증분, 평균변화율, 순간변화율, 미분계수, 미분가능, 도함수, 증가, 감소, 극대, 극소, 극값, 극댓값, 극솟값, Δx, Δy, $f'(x)$, y', $\frac{dy}{dx}$, $\frac{d}{dx}f(x)$

<교수.학습상의 유의점>

① 미분가능성과 연속성의 관계는 그래프를 통하여 확인하게 한다.

㈐ 다항함수의 적분법

1 부정적분

① 부정적분의 뜻을 안다.

② 함수의 실수배, 합, 차의 부정적분을 알고, 다항함수의 부정적분을 구할 수 있다.

2 정적분

① 구분구적법을 이해하고 간단한 도형의 넓이와 부피를 구할 수 있다.

② 정적분의 뜻을 안다.

③ 부정적분과 정적분의 관계를 이해하고, 이를 이용하여 정적분을 구할 수 있다.

3 정적분의 활용

① 곡선으로 둘러싸인 도형의 넓이를 구할 수 있다.

② 정적분을 이용하여 속도와 거리에 관한 문제를 해결할 수 있다.

<용어와 기호> 부정적분, 피적분함수, 원시함수, 적분상수, 구분구적법, 정적분, 위끝, 아래끝, 정적분의 기본 정리, $\int f(x)\,dx$, $\int_a^b f(x)\,dx$, $[F(x)]_a^b$

<교수.학습상의 유의점>

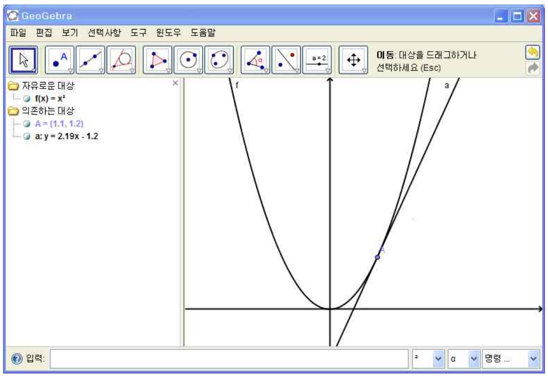
① 적분에 필요한 공식은 미분법의 공식에서 유도할 수 있음을 보인다.

(1) GeoGebra 소개

GeoGebra는 다양한 수학적 도형들을 사용자가 마음대로 만들어 보고 움직일 수 있는 컴퓨터 프로그램으로 GeoGebra의 이름은 기하(Geometry)와 대수(Algebra)의 합성어이다.

Geogebra는 학습자와 서로 반응을 주고받을 수 있는 기하 시스템으로 학습자는 점, 벡터, 선분, 직선, 원뿔곡선(이차곡선)과 함수를 구성해 볼 수 있을 뿐만 아니라, 구성물을 움직여볼 수 있다.

GeoGebra는 방정식과 좌표를 직접 입력할 수도 있으며 수, 벡터, 점에 대한 변수들을 다룰 수 있으며, 함수의 도함수와 적분값을 구할 수 있고, 근이나 극값같은 명령을 제공한다. 현재 전세계의 190여개국에서 사용되고 있다.



(That was a model that we were thinking of.) SGLee

http://www.newswave.kr/sub_read.html?uid=200142